Anné universitaire 2018-2019
Session d'Automne 2018

Université IBN TOFAÏL

**Ecole Nationale
Des
Sciences appliquées**

Cycle préparatoire

Semestre 3

Cours de Calcul différentiel

Fiche 3:
Fonctions de plusieurs variables

Pr. Ch. Bensouda

Chapter 1 Fonctions de plusieurs variables:

1.1 Introduction:

- Pour une fonction f réelle de variable réelle la notion

$$y = f(x) \in \mathbb{R}\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

nous indique que la quantité ou bien la variable y est fonction ou encore dépend de la variable x.

- Il existe de nombreuses quantités qui dépendent de plusieurs variables.

Exemples:

1- L'aire ou bien la surface d'un rectangle de longueur L et de largeur l est donnée par

$$S = f(l, L) = lL.$$

2- Le volume d'un cylindre de base un disque de rayon r et de hauteur h est donné par

$$V = f(h, r) = \pi r^2 h.$$

3- Le volume d'un parallélépipède rectangle longueur L et de largeur l et de hauteur h est donnée par

$$V = f(l, L, h) = lLh.$$

- Pour une fonction f de p variables

$$x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbb{R},$$

la notion

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}$$

nous indique que la variable y est fonction ou encore dépend de la variable vectorielle

$$x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p.$$

- Une telle fonction

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

est dite champ scalaire.

- D'une manière générale; la variable y elle aussi est une variable vectorielle

$$y = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q.$$

- Nous obtenons ainsi la notion de fonction vectorielle à variable vectorielle dite aussi notion de champ de vecteurs.

1.2 Notations et définitions:

- Tout champ de vecteur

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une fonction f de p variables

$$x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbb{R}$$

à valeurs vectorielle dans $\mathbb{R}^q$. On a

$$x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$$

et

$$y = f(x) = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q.$$

- Ils existent alors q champs scalaires de p variables chacun

$$f_1, f_2, ..., f_q$$

tels que pour tout $k = 1, 2, ...q$, on ait

$$\begin{array}{rcl} f_k & : & \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_k(x) \end{array}$$

donné par

$$y_k = f_k(x_1, x_2, , x_p) \in \mathbb{R} \ ; \ x_1, x_2, ..., x_p \in \mathbb{R}.$$

- Les q fonctions de p variables chacun

$$f_1, f_2, ..., f_q$$

sont dites fonctions coordonnées du champ vectoriel f.

- L'ensemble de définition du champ f est

$$D_f := \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ f(x) \in \mathbb{R}^q\} \subset \mathbb{R}^p.$$

- L'ensemble des valeurs du champ f est

$$V_f := \{y \in \mathbb{R}^q \ / \ \exists x \in D_f \ ; \ y = \ f(x)\} \subset \mathbb{R}^q.$$

Exemples:

1- La fonction réelle de variable vectorielle définie sur l'espace $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donnée par

$$y = f(x) = \|x\| \in \mathbb{R}_+ \ ; \ x \in \mathbb{R}^d$$

est un champ scalaire dont le domaine de définition est

$$D_f = \mathbb{R}^d$$

et dont l'ensemble des valeurs est

$$V_f = \mathbb{R}_+.$$

- La fonction réelle de variable vectorielle définie sur l'espace $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donnée par

$$y = f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{5 - \|x\|}}\right) \in \mathbb{R}_+ \ ; \ x \in \mathbb{R}^d$$

est un champ scalaire dont le domaine de définition est la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon 5.

$$D_f = B(0,5) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ / \ \|x\| < 5\right\}.$$

3- Le champ de vecteurs

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

donné par

$$y = f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{5 - \|x\|}}, \frac{1}{\|x\|}\right) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^d$$

admet pour domaine de définition

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}^d / \ 0 < \|x\|_p < 5\right\}.$$

4- Le champ scalaire

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

donné par

$$z = f(x,y) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \ ; \ (a,b,c > 0),$$

définie sur l'ensemble

$$W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq a \ ; \ 0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a})\right\}$$

admet pour domaine de définition

$$D_f = W.$$

Graphiquement, nous avons la portion du plan d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

située dans le premier octant

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

- Sur le plan d'équation

$$0 \leq x = \alpha = cste \leq a,$$

on a la courbe donnée par

$$z = f(\alpha, y) = c\left(1 - \frac{\alpha}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

avec

$$0 \leq y \leq b(1 - \frac{\alpha}{a}).$$

- Sur le plan d'équation

$$0 \leq y = \beta = cste \leq b(1 - \frac{x}{a}),$$

on a la courbe donnée par

$$z = f(x, \beta) = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{\beta}{b}\right)$$

avec

$$0 \leq x \leq a.$$

5- Le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

donné par

$$z = f(x, y) = \left(c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\right)$$

admet pour domaine de définition

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \leq 1\right\}.$$

- Graphiquement, on a la partie supérieure de l'ellipsoïde d'équation

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z \geq 0. \end{array} \right. .$$

- Et si

$$a = b = c = r > 0,$$

on a la demi-sphère supérieure centrée à l'origine et de rayon r.

Pr. Ch. Bensouda

1.3 Courbes de niveaux et surfaces de niveaux:

1.3.1 Courbes de niveaux:

Pour tout champ scalaire

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

donné par

$$z = f(x,y) \in \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- On appelle courbe de niveaux

$$c \in V_f \subset \mathbb{R}$$

la courbe $\mathcal{C}_c$ données par l'équation

$$f(x,y) = c \in V_f\ ;\ (x,y) \in D_f.$$

- Une paramétrisation de la courbe de niveau $\mathcal{C}_c$ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.\ ;\ t \in V \subset \mathbb{R}$$

et l'équation de la courbe $\mathcal{C}_c$ devient

$$f(x(t), y(t)) = c\ ;\ t \in V.$$

- La surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$z = f(x,y) \in \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$$

est telle que le plan d'équation

$$z = c \in V_f \subset \mathbb{R}$$

rencontre la surface $\mathcal{S}$ en la courbe d'équation

$$z = f(x,y) = c\ ;\ (x,y) \in D_f.$$

- On dresse alors une carte topographique dans le plan (x, o, y) constituée des différentes courbes de niveaux

$$f(x,y) = c \in V_f\ ;\ (x,y) \in D_f \subset \mathbb{R}^2.$$

Exemple:
Considérons le champ scalaire

$$\begin{array}{ccl} z & = & f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) \in \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \in & D_f = \mathbb{R}^2. \end{array}$$

- Pour tout

$$c \in \mathbb{R}_+;$$

la courbe de niveau associée est le cercle centré à l'origine et de rayon

$$r = \sqrt{c}$$

donnée par l'équation

$$\left(x^2 + y^2\right) = c.$$

- Pour $c = 0$, on a le point origine

$$(x, y) = (0, 0).$$

- Pour $c = 1$, on a le cercle centré à l'origine et de rayon

$$r = 1$$

donné par l'équation

$$\left(x^2 + y^2\right) = 1.$$

- Pour $c = 5$, on a le cercle centré à l'origine et de rayon

$$r = \sqrt{5}$$

donné par l'équation

$$\left(x^2 + y^2\right) = 5.$$

- La surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$z = f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \in \mathbb{R}_+ \ , \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est telle que le plan d'équation

$$z = c \in \mathbb{R}_+$$

rencontre la surface $\mathcal{S}$ en le cercle d'équation

$$z = \left(x^2 + y^2\right) = c \ ; \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

cercle du plan

$$z = c$$

centré au point

$$(0, 0, c) \text{ et de rayon } r = \sqrt{c}.$$

- Une telle courbe n'a pas de paramétrisation globale. Mais pour

$$y \geq 0;$$

on a la paramétrisation:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{c - t^2} \geq 0 \end{cases} ; \ t \in [-c, c] .$$

Et pour

$$y \leq 0;$$

on a la paramétrisation

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{c - t^2} \leq 0 \end{cases} ; \ t \in [-c, c] .$$

1.3.2 Surfaces de niveaux:

Pour tout champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) \end{array}$$

donné par

$$w = f(x, y, z) \in \mathbb{R} \; ; \; (x, y, z) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- On appelle surface de niveaux

$$c \in V_f \subset \mathbb{R}$$

la surface $\mathcal{S}_c$ données par l'équation

$$f(x, y, z) = c \in V_f \subseteq \mathbb{R} \; ; \; (x, y, z) \in D_f.$$

- Une paramétrisation de la surface de niveau $\mathcal{S}_c$ est donnée par

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ z = z(s, t) \end{cases} ; \; (s, t) \in V \subset \mathbb{R}^2$$

et l'équation de la surface $\mathcal{S}_c$ devient

$$f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = c \; ; \; (s, t) \in V.$$

- L'hyper-surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$w = f(x, y, z) \in \mathbb{R} \; ; \; (x, y, z) \in D_f \subset \mathbb{R}^3$$

est telle que l'hyper-plan d'équation

$$w = c \in V_f \subset \mathbb{R}$$

rencontre l'hyper-surface $\mathcal{S}$ en la surface d'équation

$$f(x, y, z) = c \; ; \; (x, y, z) \in D_f.$$

Exemple:
Considérons le champ scalaire

$$w = f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \; ; \; (x, y, z) \in D_f = \mathbb{R}^3.$$

- Pour tout

$$c \in \mathbb{R}_+;$$

la surface de niveau associée est la sphère centré à l'origine et de rayon

$$r = \sqrt{c}$$

donnée par l'équation

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = c.$$

- Pour $c = 0$, on obtient le point origine

$$(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

- Pour $c = 1$, on obtient la sphère centré à l'origine et de rayon

$$r = 1$$

donné par l'équation

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 1.$$

- Pour $c = 5$, on obtient la sphère centré à l'origine et de rayon

$$r = \sqrt{5}$$

donné par l'équation

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 5.$$

- L'hyper-surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$w = f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\ ,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

est telle que l'hyper-plan d'équation

$$w = c \in \mathbb{R}_+$$

rencontre l'hyper-surface $\mathcal{S}$ en la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = c\ ;\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

sphère de l'hyper-plan d'équation

$$w = c \in \mathbb{R}_+$$

centré au point

$$(0, 0, 0, c) \text{ et de rayon } r = \sqrt{c}.$$

- Une telle surface n'a pas de paramétrisation globale. Mais pour

$$z \geq 0;$$

on a la paramétrisation:

$$\left\{\begin{array}{c} x = s \\ y = t \\ z = \sqrt{c - (s^2 + t^2)} \geq 0 \end{array}\right.\ ;\ (s, t) \in B_f\left(0, \sqrt{c}\right).$$

Et pour

$$z \leq 0;$$

on a la paramétrisation

$$\left\{\begin{array}{c} x = s \\ y = t \\ z = -\sqrt{c - (s^2 + t^2)} \leq 0 \end{array}\right.\ ;\ (s, t) \in B_f\left(0, \sqrt{c}\right).$$